Table des matières

Chapitre 1

Analyse cinématique du mouvement

Cinématique : La cinématique est l'étude des mouvements en fonction du temps, sans se préoccuper des causes de ces mouvements.

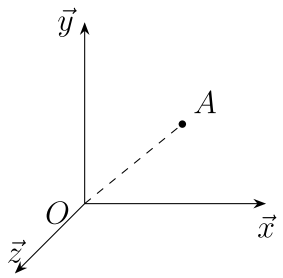
Point matériel : On appelle *point matériel* (ou *masse ponctuelle*) un système mécanique que l'on modélise par un point géométrique M, auquel est associée une masse m. Ce modèle correspond à un corps dont la taille est négligée que l'on assimile à un point.

On s'intéresse ici à la mécanique du point, par opposition à la mécanique du solide (voir section **??**).

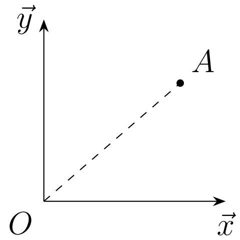
1.1 Analyse en translation

1.1.1 Apports mathématiques

Repères



(a) Repère à trois dimensions $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



(b) Repère à deux dimensions $R(O, \vec{x}, \vec{y})$

Repère à trois dimensions :
Un repère tridimensionnel s'écrit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec :
— O : l'origine du repère,
— $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: les vecteurs unitaires dans chaque axe
Un point A dans ce repère est repéré par ses coordonnées X_A, Y_A et Z_A. On peut écrire le vecteur $\overrightarrow{OA}$ ainsi :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$$

Repère à deux dimensions :
En 2D, le repère s'écrit $R(O, \vec{x}, \vec{y})$. Un point A est alors repéré par :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix}$$

Vecteurs

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche), ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. Si A et B sont deux points distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède trois éléments caractéristiques :

- sa direction (la droite (AB)) ;
- son sens (il y a deux sens possibles de parcours de la droite (AB) : de A vers B ou de B vers A) ;
- sa norme (ou sa longueur, la longueur du segment $[AB]$, on écrit $||\overrightarrow{AB}||$).

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ peuvent être obtenues à partir des coordonnées des points $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \end{pmatrix}$$

La norme d'un vecteur peut être obtenue par la formule suivante qui découle directement du théorème de Pythagore :

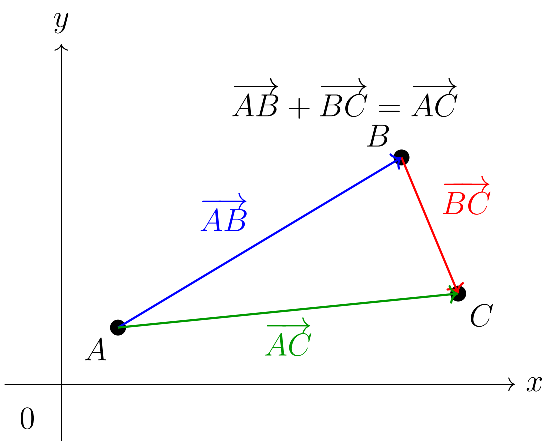
$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{{X_{AB}}^2 + {Y_{AB}}^2}$$

Cette formule est généralisable notamment dans l'espace, on a alors :

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{{X_{AB}}^2 + {Y_{AB}}^2 + {Z_{AB}}^2}$$

Relation de Chasles :

Soit A un point arbitraire, on construit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AC}$ représente alors le vecteur somme.



Quels que soient les points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ou

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$$

car $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$

Remarque : Cette relation exprime que pour aller du point A au point C, on peut passer par un point intermédiaire B quelconque. La somme des deux "déplacements" $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est équivalente au déplacement direct $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 1. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BA}$, sachant que :

$$A(x_A = 4,\ y_A = 3), \quad B(x_B = 2,\ y_B = 1)$$

Exercice 2. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{BA}$

Exercice 3. Après l'analyse d'une vidéo, les coordonnées successives d'un objet en mouvement ont été relevées dans un repère orthonormé. Les positions sont les suivantes :

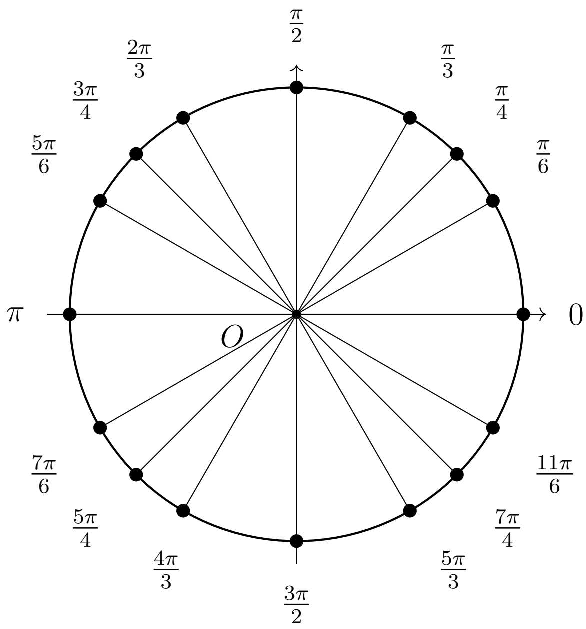
Point	x	y
A	2	3
B	5	7
C	9	4
D	12	8

a. Calculer les distances entre les positions successives

b. En déduire la distance totale parcourue de A à D en passant par B et C.

Trigonométrie

RAJOUTER QQ PART FORMULES cos(pi/2 -x) = sin(x)...



Note : un radian est la mesure d'un angle au centre d'un cercle ayant un arc de même longueur que le rayon. Un tour complet équivaut à 2π radians ou 360 degrés. Un demi tour équivaut à π radians ou 180 degrés. '

Angles usuels :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Avec θ l'angle en radian et R le rayon du cercle, on a la longueur de l'arc de cercle s telle que :

$$s = R\theta$$

Passer de radians à degrés et inversement :
On sait qu'un tour complet vaut $360° = 2\pi$ radians.
On peut donc utiliser un **produit en croix** pour convertir :

- **De radians à degrés** : on multiplie par $\dfrac{180}{\pi}$
  Exemple : $\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{180}{\pi} = 60°$
- **De degrés à radians** : on multiplie par $\dfrac{\pi}{180}$
  Exemple : $45° = 45 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}$ rad

Cela vient du fait que :
Si $180° = \pi$ rad, alors par produit en croix :

$$x° = x \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{et} \quad x \text{ rad} = x \times \frac{180°}{\pi}$$

Sinus et cosinus : soit M un point sur le cercle trigonométrique d'angle θ, on définit $cos\theta$ et $sin\theta$ comme les coordonnées (x, y) du point M. Si le rayon du cercle est de longueur R, les coordonnées du point M sont alors $Rcos\theta$ et $Rsin\theta$.

Le rayon du cercle étant égal à 1, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(\theta)$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(\theta)$
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	θ

La **Tangente** peut se définir telle que $tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$. Elle intervient souvent en biomécanique pour le calcul de l'angle d'un vecteur par rapport à l'horizontale.

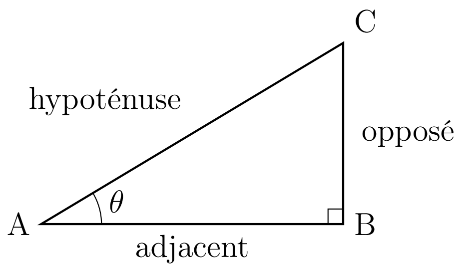
Egalement, dans un triangle rectangle, on a :

SOHCAHTOA :

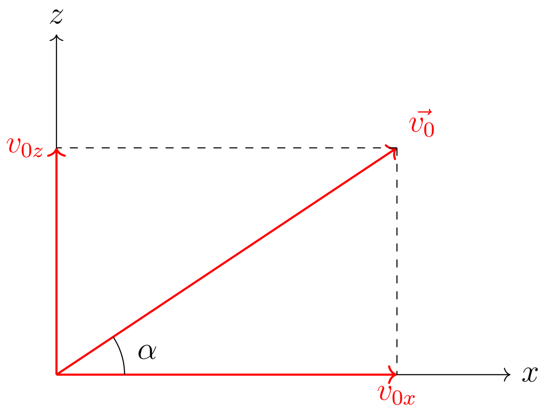
— $\sin(\theta) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$

— $\cos(\theta) = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

— $\tan(\theta) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$



Application aux vecteurs



Décomposition du vecteur vitesse : On a pu voir que si le rayon du cercle est de longueur R, les coordonnées du point M sont alors $Rcos\theta$ et $Rsin\theta$. Ici le rayon du cercle serait de longueur v_0, les coordonnées du vecteur $\vec{v_0}$ sont donc :

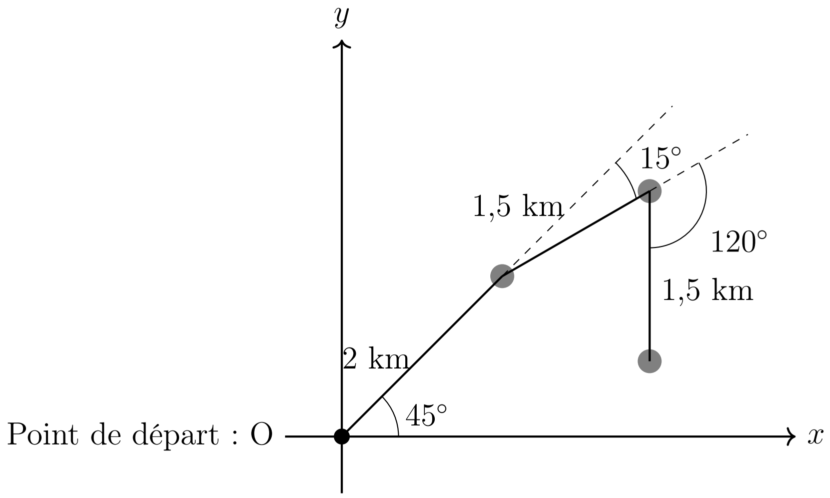
— $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$: composante horizontale

— $v_{0z} = v_0 \sin(\alpha)$: composante verticale

Résultat retrouvable avec SOHCAHTOA.

Exercice 4. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}$, sachant que $||\vec{v}|| = 12$ et l'angle par rapport à l'horizontale $\theta = \frac{\pi}{6}$ sans calculatrice. De même avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ par rapport à la verticale (ne pas hésiter à faire un schéma).

Exercice 5. Dans une course d'orientation, les coureurs suivre un parcours comme indiqué sur la figure, où sont donnés la norme et l'orientation des 3 premiers segments de la course qui séparent les 3 premières balises.



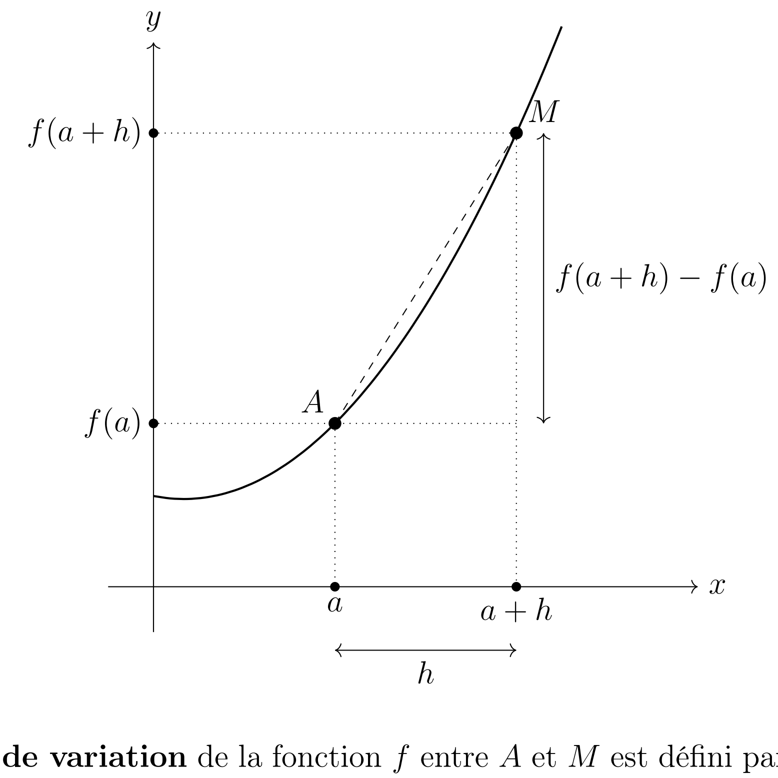
Quel est le déplacement entre la dernière balise et le point de départ ? Exprimer le résultat sous forme d'un vecteur.

Dérivation

La dérivation d'une fonction est introduite par l'étude de la droite tangente à sa courbe représentative. Elle est un outil pour l'étude de ses variations et permet de résoudre de nombreux problèmes de cinématique notamment.

a. Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant A et M.



Le **taux de variation** de la fonction f entre A et M est défini par le coefficient directeur de la droite (AM) sécante à la courbe. Il traduit l'évolution moyenne de la fonction f de A à M.

Le coefficient directeur de la droite (AM) s'obtient par la formule générale :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$

Ici on a alors :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Le taux de variation d'une position correspond donc à l'évolution moyenne de celle-ci soit la vitesse moyenne au cours d'un intervalle de temps. On retrouve bien :

$$v_{moy} = \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t}$$

avec $\vec{OM}$ le vecteur position, Δt l'intervalle de temps (ex. $t_1 - t_2$).

De façon analogue, le taux de variation d'une vitesse correspond alors à l'accélération moyenne au cours de l'intervalle de temps.

Exercice 6. Dans une piscine de 25 mètres, un élève a mis 31 secondes pour parcourir la distance en brasse.
Quelle est sa vitesse moyenne en m/s ?

Exercice 7. Sur un parcours de 200 mètres en nage papillon, un athlète atteint les 50 mètres en 30 secondes et atteint les 200 mètres en 120 secondes.
Quelle est sa vitesse moyenne entre ces deux points ?

b. Nombre dérivé

Pour avoir une idée plus précise de l'évolution de la position d'un point, il faut alors réduire l'intervalle de temps h. D'un point de vue mathématique, cela revient à calculer la dérivée de la fonction f en un point a. Cela correspond alors au taux de variation quand h tend vers 0, c'est-à-dire le coefficient de pente de la tangente de la courbe de f en a.

Alors on a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En biomécanique, la vitesse instantanée en un instant t_i correspond au nombre dérivé de la position en cet instant. Cela revient à :

$$\vec{v}(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t}$$

On notera :

$$\vec{v}(t_i) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

De manière analogue, l'accélération instantanée en un instant t_i correspond au nombre dérivé de la vitesse en ce même instant. On a :

$$\vec{a}(t_i) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La façon la plus commode de calculer un nombre dérivé pour l'application en biomécanique est de dériver la fonction associée. Pour autant, on peut toujours l'approximer en réalisant le taux de variation avec Δt très petit lorsque cela est possible (par exemple avec une fréquence d'échantillonnage importante, comme lors d'un 100m en athlétisme où les temps sont mesurés au millième de seconde près).

c. Fonction dérivée

La fonction dérivée de f est la fonction f' qui lui associe en chaque point son nombre dérivé. En biomécanique, on notera $f' = \dfrac{df}{dt}$ pour montrer que l'on dérive par rapport au temps t.

Voici quelques dérivées usuelles en biomécanique :

Fonction $f(t)$	**Dérivée** $f'(t)$
a (constante)	0
t	1
$at + b$	a
$at^2 + bt + c$	$2at + b$

Plus généralement, on a la dérivée d'une fonction de la forme t^n qui est égale à nt^{n-1}. Par exemple, avec $f(t) = t^5$, on a :

$$\frac{df}{dt} = 5t^{5-1} = 5t^4$$

Alors, en cinématique, si la position suit une fonction $x(t)$, la vitesse définie comme la dérivée de la position $x(t)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'(t)$$

Pour finir, une interprétation concrète de la dérivée revient à dire qu'une fonction f dérivée positive équivaut à une fonction f croissante. De manière analogue, une fonction f dérivée négative équivaut à une fonction f décroissante. Enfin, une fonction f dérivée nulle équivaut à une fonction f constante.

Exercice 8. À l'aide de l'équation du taux de variation, démontrer que la dérivée de la fonction $f(t) = mt + p$ vaut $\dfrac{df}{dt} = m$.

Exercice 9. Un sprinter parcourt un 100 mètres, et sa position $x(t)$ en mètres en fonction du temps t en secondes est modélisée par l'équation suivante :

$$x(t) = -0.067t^3 + 1.67t^2$$

a. Calculer la vitesse et l'accélération du sprinter en fonction du temps.
b. Quelle est la vitesse du sprinter au moment où il franchit la ligne d'arrivée (au bout de 10 secondes) ?
c. Quelle est son accélération à ce moment-là ?

Primitives et intégrales

Une **primitive** F d'une fonction f est une fonction dont la dérivée est égale à f, c'est-à-dire :

$$F' = \frac{dF}{dt} = f.$$

Cela correspond à l'opération inverse de la dérivation.

Le calcul d'une primitive est plus complexe que celui d'une dérivée, notamment à cause de la non-unicité des primitives. En effet, si $4t$ est une primitive de 4, alors $4t+1$, $4t+2$, etc., en sont aussi. On ajoute donc en général une **constante arbitraire** C à la primitive.

Voici quelques primitives usuelles utiles en biomécanique (avec C = constante arbitraire) :

Fonction $f(t)$	**Primitive** $F(t)$
0	C
a	$at + C$
at	$\frac{1}{2}at^2 + C$

Plus généralement, pour une fonction de la forme $f(t) = t^n$, une primitive est :

$$F(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \quad (\text{si } n \neq -1).$$

Exemple : pour $f(t) = t^5$, une primitive est :

$$F(t) = \frac{1}{6}t^6 + C \quad \text{car} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}t^6\right) = t^5.$$

Les primitives sont principalement utilisées dans deux contextes en biomécanique :

- Le **calcul intégral**, qui permet de déterminer l'aire sous une courbe.
- La **détermination des équations horaires**, notamment pour retrouver la position à partir de la vitesse, ou la vitesse à partir de l'accélération.

Pour le moment, on interprète une intégrale définie comme une aire sous la courbe d'une fonction $f(t)$ entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \text{aire sous la courbe de } f \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2.$$

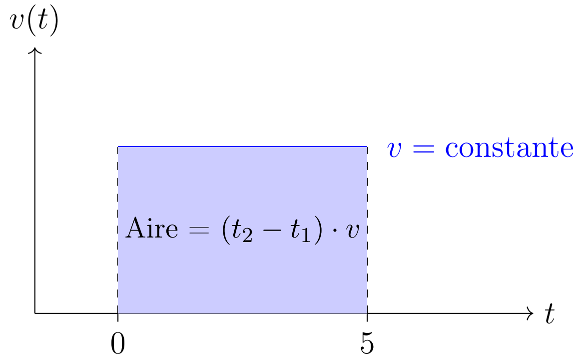
D'un point de vue algébrique, une intégrale d'une fonction $f(t)$ entre les instants t_1 et t_2 est définie comme la différence d'une primitive de f aux instants t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = F(t_2) - F(t_1)$$

Ainsi, si on remplace $f(t)$ par la vitesse et $F(t)$ par la position, l'intégrale de la vitesse de t_1 à t_2 correspond à la différence de la position entre ces mêmes instants, c'est-à-dire la distance parcourue.

Exemple : position à partir de la vitesse

Supposons qu'un objet se déplace en ligne droite avec une vitesse constante de $v = 2$ m/s entre $t = 0$ s et $t = 5$ s.



Sur le graphique vitesse/temps, la courbe est un segment horizontal. L'aire sous la courbe correspond à un rectangle (ou triangle dans le cas où la vitesse aurait été croissante), et représente la distance parcourue :

$$\text{Aire} = \text{base} \times \text{hauteur} = (5 - 0) \times 2 = 10 \text{ m}.$$

Dans le cas d'une vitesse constante, on retrouve alors l'équation comme quoi :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Donc, l'objet a parcouru 10 m entre $t = 0$ s et $t = 5$ s.

Ce type de raisonnement géométrique (aire sous une courbe simple) permet de calculer facilement la distance parcourue à partir de la vitesse ou l'évolution de la vitesse à partir de l'accélération.

Exercice 10. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a. $f(t) = 8$
b. $f(t) = 5t$
c. $f(t) = 8t^2$

Exercice 11. À partir de l'accélération $a(t) = 10$ (constante), déterminer :

a. La fonction vitesse $v(t)$, primitive de $a(t)$
b. La fonction position $x(t)$, primitive de $v(t)$

Exercice 12. Calculer l'intégrale suivante de façon géométrique :

$$\int_4^{10} 2t \, dt$$

Exercice 13. À partir de l'équation de vitesse trouvée à l'exercice 11, calculer la distance parcourue entre $t = 4$ s et $t = 8$ s. On prendra $C_1 = 1$.

1.1.2 Cinématique : définitions

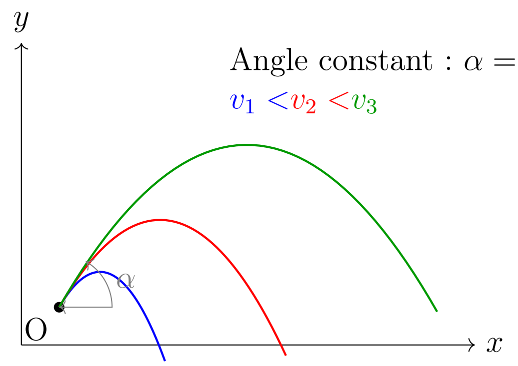
Un **mouvement rectiligne** est un déplacement qui s'effectue le long d'une ligne droite.

Un **mouvement circulaire** est un déplacement qui s'effectue le long d'un arc de cercle dont le centre est l'axe de rotation.

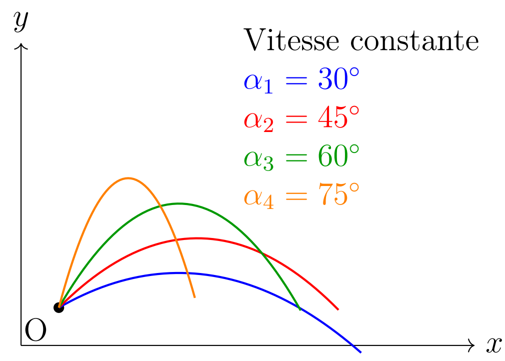
- Si la valeur de la vitesse reste constante, on parle de **mouvement uniforme**. Dans ce cas, on a :
$$\vec{v} = C^{st} \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$
- Un mouvement est **accéléré** lorsque la norme de la vitesse augmente, et **décéléré** lorsqu'elle diminue. Si la vitesse et l'accélération sont de même sens, la vitesse augmente ; s'ils sont de sens opposés, la vitesse diminue.
- Si l'accélération est constante, on parle de **mouvement uniformément accéléré ou décéléré**.

Une **trajectoire parabolique** (ou balistique) est une trajectoire décrite par un objet soumis uniquement à son poids possédant une vitesse initiale, comme un projectile lancé dans l'air.

L'objet suit une parabole orientée vers le bas. On peut y caractériser la portée et la hauteur maximale. Ces paramètres dépendent notamment de la vitesse initiale, de l'angle d'envol et de la hauteur initiale.



(a) Influence de la vitesse initiale



(b) Influence de l'angle d'envol

1.1.3 Équations horaires

Trajectoire rectiligne

Une équation horaire est une équation qui permet de décrire les paramètres cinématiques d'un objet en fonction du temps

Exercice d'application. Soit une bille de masse m, assimilée à un point matériel, lâchée sans vitesse initiale du point O pris comme origine de temps et d'espace. On prendra l'accélération $a_y = g = 10$ m/s^2. Déterminer par intégration la vitesse en fonction du temps.

Solution et détermination de la constante C
On sait que $\frac{dv}{dt} = a(t)$, donc $v(t) = \int a(t)\,dt$. Alors :

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 10\,dt = 10t + C$$

Pour déterminer C, on posera $t = 0$. L'objectif est d'isoler la constante C. Alors on trouve :

$$v(0) = 10 \times 0 + C \Rightarrow C = v(0)$$

On remarque que dans le cas d'équations horaires, la constante C correspond en fait à la condition initiale, que l'on notera pour la vitesse v_0.
La solution est donc :

$$v(t) = 10t + v_0 = 10t + 0 = 10t$$

Exercice 14. Déterminer la position de la bille à partir de l'équation de la vitesse trouvée plus tôt.

Exercice 15. Déterminer la vitesse et la position de la bille avec maintenant une vitesse initiale $v_0 = 10$ m/s (la bille est lancée vers le haut).

Exercice 16. Lors d'un exercice de squat, un sportif déplace une charge verticalement le long de l'axe z, orienté vers le haut. On modélise le mouvement selon trois phases successives :

Phase 1 — Descente (excentrique) : le mouvement commence à $t = 0$, la vitesse initiale est nulle. La charge est soumise à une accélération constante $a_1 = -0.25$ m/s^2. Cette phase dure $t_1 = 2.0$ s.
Phase 2 — Arrêt momentané : la charge s'immobilise brièvement à sa position la plus basse pendant une durée négligeable ($\Delta t = 0.1$ s). Sa vitesse est alors nulle.
Phase 3 — Montée (concentrique) : la charge repart vers le haut avec une accélération constante $a_2 = +0.11$ m/s^2, en partant d'une vitesse nulle. Cette phase dure $t_2 = 3$ s.

a. Établir les équations horaires de la vitesse $v(t)$ pendant :
   — La phase de descente ($0 \leq t \leq t_1$)
   — La phase de montée (démarrant à $t = t_1 + \Delta t$, pour une durée de t_2)
b. Tracer le graphe de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps sur l'ensemble du mouvement.
c. Caractériser la trajectoire lors de chaque phase, justifier.
d. Déterminer la vitesse moyenne de la charge sur chaque phase du mouvement.
e. Calculer la distance totale parcourue.

Trajectoire parabolique
On remarquera que lorsque $a(t) = g$, c'est-à-dire que l'accélération est égale à l'accélération gravitationnelle, on parle de mouvement en **chute libre**. On retrouve alors

des trajectoires **paraboliques** (ou balistiques) ou bien **rectilignes** vers le bas.

Exercice d'application. Lors d'un lancer franc, un joueur de basketball lance un ballon depuis une hauteur de h_0 (correspondant à la hauteur approximative de ses mains au moment du tir). Le ballon est lancé avec une vitesse initiale v_0, formant un angle de θ avec l'horizontale. On prendra l'accélération $a_y = -g$.

On suppose que l'origine du repère est au niveau du sol, juste sous le point de lancement, et que le mouvement a lieu dans un plan sagittal (2D vue de côté). + SCHEMA

Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du centre du ballon.

Solution — Détermination des équations horaires

On sait que $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$, donc $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt$. Alors :

$$\begin{cases} v_x(t) = \displaystyle\int a_x(t)\,dt = \int 0\,dt = v_{0x} = v_0\cos(\theta) \\ \\ v_y(t) = \displaystyle\int a_y(t)\,dt = \int -g\,dt = -g\cdot t + v_{0y} = -g\cdot t + v_0\sin(\theta) \end{cases}$$

De plus, $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}(t)$ avec $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position, donc $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt$. Alors :

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int v_x(t)\,dt = \int v_0\cos(\theta)\,dt = v_0\cos(\theta)\cdot t + x_0 \\ \\ y(t) = \displaystyle\int v_y(t)\,dt = \int (-g\cdot t + v_0\sin(\theta))\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta)t + y_0 \end{cases}$$

En prenant $x_0 = 0$ et $y_0 = h_0$, on obtient finalement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\theta)\cdot t \\ \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta)t + h_0 \end{cases}$$

On remarque que l'équation horaire de la position verticale $y(t)$ est de la forme :

$$y(t) = at^2 + bt + c$$

Il s'agit donc d'un **polynôme du second degré**. Ce type de fonction permet de modéliser les trajectoires paraboliques que l'on rencontre fréquemment en biomécanique, notamment lors de mouvements en chute libre.

Dans ce contexte, il est utile de maîtriser l'étude de ces fonctions pour, par exemple, déterminer la hauteur maximale de la balle, le temps pour y parvenir, si le ballon atteint le panier...

1.1.4 Apports mathématiques : polynômes du 2nd degré

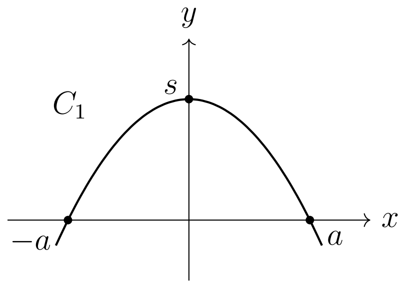
On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

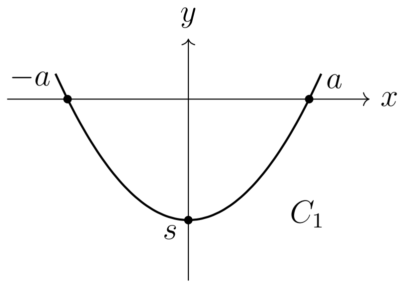
Avec $a \neq 0$.

Etude des variations

- si $a > 0$, alors f est strictement décroissante puis strictement croissante
- si $a < 0$, alors f est strictement croissante puis strictement décroissante



(a) Parabole avec $a < 0$



(b) Parabole avec $a > 0$

Equation du second degré

Une équation du second degré est une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Résoudre cette équation consiste à déterminer l'ensemble des nombres x qui vérifient l'égalité.

Méthode générale Cette méthode passe par l'identification des coefficients a, b et c de l'équation, puis par le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et enfin le calcul des résultats selon le signe de Δ.

Si $\Delta < 0$ le polynôme n'admet pas de racine réelle. Ce cas n'arrive pas en biomécanique.

Si $\Delta = 0$, ce qui est très improbable en biomécanique, le polynôme admet une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Enfin, si $\Delta > 0$ le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En général en biomécanique, une solution sera positive et une négative. La solution positive sera alors l'unique solution à considérer puisqu'une solution négative n'a souvent pas de sens dans les problèmes.

Exercice 17. On donne trois fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1 = 4x^2 + 4x - 8 = 0\,;\ f_2 = 2x^2 - 2x + 0.5 = 0\,;\ f_3 = 3x^2 + x + 8 = 0$$

Résoudre les trois équations

Exercice 18. Trouver à quel instant un projectile atteint le sol, sachant que sa trajectoire verticale est décrite par l'équation suivante :

$$h(t) = -4,9t^2 + 29,4t + 1,5$$

Exercice 19. Déterminer la portée du projectile connaissant l'instant t auquel il atteint le sol, sachant que sa trajectoire horizontale est décrite par l'équation suivante :

$$x(t) = 15,2t + 2,3$$

Extremum L'extremum d'une fonction correspond à un maximum ou un minimum sur un intervalle donné. Cela peut par exemple correspondre à l'apogée (hauteur maximale) de la trajectoire d'un projectile.

L'extremum d'une fonction polynôme du second degré vaut toujours

$$\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a}$$

Ces termes sont retrouvables par le calcul et n'ont pas vocation à être mémorisés. Dans le cas spécifique d'une trajectoire parabolique, on pourrait écrire :

$$h_{max} = y(t_h) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ avec } t_h = -\frac{b}{2a}$$

En considérant h_{max} la hauteur maximale atteinte (apogée) et t_h l'instant associé.

En effet, l'extremum du polynôme du second degré est atteint quand le taux de variation de celui-ci sera égal à 0. C'est-à-dire quand la droite tangente à la courbe est horizontale (voir fig.1.4).

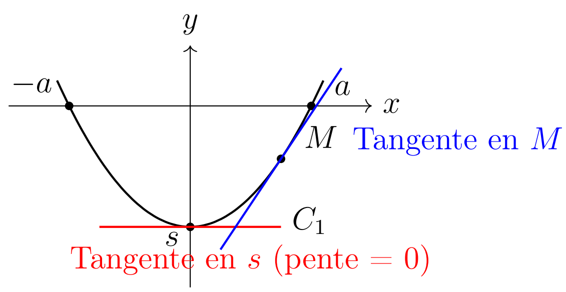


FIGURE 1.4 – Parabole avec $a > 0$ et tangentes

C'est alors équivalent au fait que la **dérivée** de la fonction soit égale à zéro. On peut alors poser, avec $f(x)$ une fonction polynôme du second degré, pour trouver l'extremum :

$$f'(x) = 0$$

Exercice 20. Calculer la dérivée de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 21. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$

Exercice 22. Trouver à quel instant un projectile atteint sa hauteur maximale, sachant que sa trajectoire verticale est décrite par l'équation suivante :

$$h(t) = -4,9t^2 + 29,4t + 1,5$$

Exercice 23. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le projectile (maximum de $h(t)$)

Exercice 24. Soit un projectile dont la trajectoire est décrite par les équations horaires suivante :

$$\begin{cases} x(t) = 12.8t + 1.2 \\ y(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 2.1 \end{cases}$$

a. Déterminer l'équation de la trajectoire $y(x)$.

b. À quelle distance horizontale l'apogée est-elle atteinte ?

Exercice 25. Trouver à quel instant un projectile atteint le sol **sans utiliser le discriminant**, sachant que sa trajectoire verticale est décrite par l'équation suivante avec hauteur initiale nulle :

$$h(t) = -4,9t^2 + 29,4t$$

Exercice 26. Un joueur de volley-ball effectue un service depuis une position située à 1 mètre avant la ligne de fond de son terrain. Le terrain de volley-ball mesure 18 mètres de long, le filet est placé à 9 mètres de chaque ligne de fond et sa hauteur est de 2,43 mètres.

Conditions initiales :

— Position initiale : $x_0 = 0$ m, $y_0 = 2.1$ m

— Vitesse initiale : $v_0 = 13$ m/s sous un angle de 28° au dessus de l'horizontale

— Accélération verticale : $g = 9.8$ m/s²

— Accélération horizontale nulle

a. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de la balle.

b. La balle franchit-elle le filet ?

c. La balle retombe-t-elle dans le terrain adverse ou est-elle out ?

1.2 Analyse en rotation

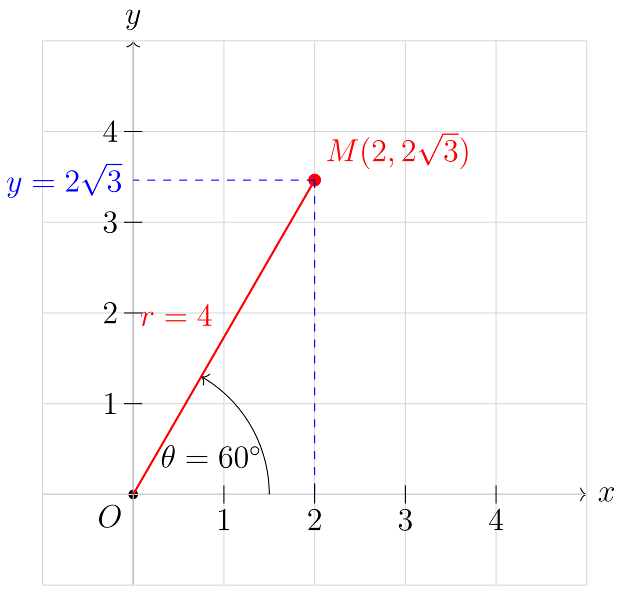
Un mouvement circulaire est caractérisé par le déplacement d'un point matériel dont la trajectoire est un cercle. De manière analogue aux mouvements rectilignes, le mouvement circulaire peut être uniforme, accéléré, uniformément accéléré...

On peut alors caractériser la position du point non plus en coordonnées **cartésiennes** (avec x et y) mais en coordonnées **polaires**. Le point peut alors être exprimé par un angle (souvent noté θ en degrés ou en radians) et une distance : rayon du cercle (souvent notée r).

Coordonnées polaires : exemple
Soit le point M situé dans le plan.
Coordonnées polaires : $M(r = 4, \theta = 60°)$
Coordonnées cartésiennes :

— $x = r\cos\theta = 4\cos(60°) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

— $y = r\sin\theta = 4\sin(60°) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$



1.2.1 Apport mathématique : produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un plan est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs, et $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ sont leurs normes respectives.

Si $\vec{u} = (u_x, u_y)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y)$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

Interprétation projective : Le produit scalaire peut aussi être vu comme la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ multipliée par la norme de $\vec{u}$.

Plus précisément :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})\|$$

où $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$ est la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

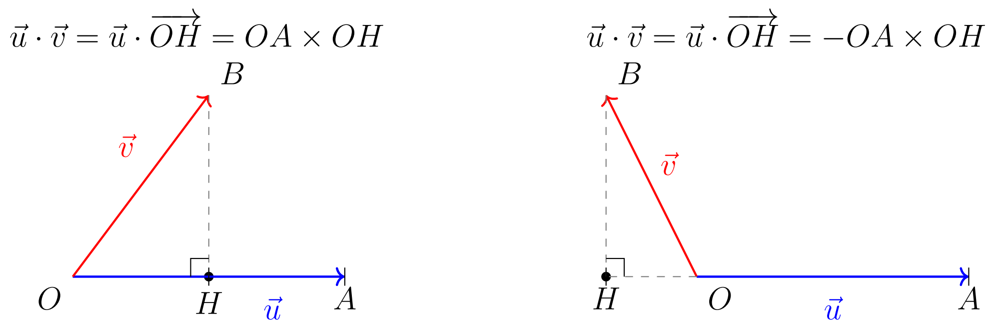


FIGURE 1.5 – Définition du produit scalaire par projection orthogonale

Exercice d'application. Exprimer l'angle θ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution

On sait que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

et

$$\theta = \arccos\left(\cos(\theta)\right)$$

On en déduit :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

Exercice 27. Soient deux vecteurs $\vec{u} = (3, 4)$ et $\vec{v} = (5, 2)$. Calculer l'angle θ entre ces deux vecteurs en degrés.

Exercice 28. La cinématique d'un athlète réalisant un squat est enregistrée par capture du mouvement. À un instant donné, on extrait les coordonnées des vecteurs jambe et cuisse :

$$\overrightarrow{jambe} = (0.4, 0.2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{cuisse} = (0.3, 0.6)$$

a. Calculer l'angle du genou θ via la formule du produit scalaire
b. Calculer l'angle du genou θ via les formules de trigonométrie

1.2.2 Lien entre mouvement linéaire et mouvement circulaire

Considérons un point matériel qui décrit un mouvement circulaire de rayon R autour d'un centre O. La position du point peut être repérée par l'angle $\theta(t)$ (en radians) mesuré depuis une direction de référence.

Par définition, on a pu voir que la longueur de l'arc s parcourue sur le cercle est proportionnelle à l'angle θ :

$$s = R\,\theta$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt}$$

Or :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Donc :

$$v = R\,\omega$$

De plus, on a :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt}$$

Or :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Donc :

$$a = R\,\alpha$$

On obtient ainsi les relations entre grandeurs angulaires et linéaires :

$$s = R\theta \quad ; \quad v = R\omega \quad ; \quad a = R\alpha$$

Il est également possible de trouver, en fonction des sources, la notation suivante :

$$s = R\theta \quad ; \quad v = R\dot{\theta} \quad ; \quad a = R\ddot{\theta}$$

Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier la cohérence d'une formule en comparant les dimensions physiques des grandeurs :

— Longueur : $[L]$; Temps : $[T]$; Masse : $[M]$.

— La vitesse : $[v] = [L][T]^{-1}$; l'accélération : $[a] = [L][T]^{-2}$.

— L'angle (en radian) est adimensionné : $[\theta] = 1$; donc $[\dot{\theta}] = [T]^{-1}$ et $[\ddot{\theta}] = [T]^{-2}$.

Application aux relations $s = R\theta$, $v = R\dot{\theta}$, $a = R\ddot{\theta}$:

$$[s] = [R][\theta] = [L] \cdot 1 = [L], \qquad [v] = [R][\dot{\theta}] = [L] \cdot [T]^{-1} = [L][T]^{-1},$$

$$[a] = [R][\ddot{\theta}] = [L] \cdot [T]^{-2} = [L][T]^{-2}.$$

Les trois égalités sont donc dimensionnellement cohérentes.

Exercice d'application. On considère un mouvement circulaire de rayon R avec

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \tfrac{1}{2}\alpha\, t^2,$$

où θ_0 est un angle initial, ω_0 une vitesse angulaire initiale et α une accélération angulaire constante.

Vérifier par l'analyse dimensionnelle que chaque terme de $\theta(t)$ a la même dimension.

Solution.

$$[\theta_0] = 1, \qquad [\omega_0 t] = [T]^{-1} \cdot [T] = 1, \qquad \left[\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right] = [T]^{-2} \cdot [T]^2 = 1.$$

Les trois termes sont adimensionnés $\Rightarrow$ somme cohérente : $[\theta(t)] = 1$.

Exercice 29. Un point P se déplace sur un cercle de rayon 5 cm centré à l'origine. À l'instant $t = 0$, il se trouve à l'angle $\theta_0 = 30°$ et tourne dans le sens horaire avec une vitesse angulaire constante de $\omega = 20°/s$.

a. Déterminer la position du point P en coordonnées polaires à $t = 3$ s

b. Calculer les coordonnées cartésiennes du point P à cet instant

c. Quelle distance le point a-t-il parcourue sur le cercle ?

Exercice 30. Un joueur de tennis effectue un service. L'analyse vidéo montre que sa raquette décrit un arc de cercle de rayon 80 cm autour de son épaule. Au moment de l'impact avec la balle, la raquette se trouve à un angle de 45° par rapport à l'horizontale.

a. Déterminer la position de la raquette en coordonnées polaires et cartésiennes à l'impact

b. Si la vitesse angulaire de la raquette est de 12 rad/s à l'impact, calculer la vitesse linéaire de la raquette

1.2.3 Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement circulaire uniforme est le déplacement d'un point matériel dont la trajectoire est un cercle de rayon R et dont la vitesse v (en bleu sur le schéma) est constante en norme. Pour étudier les mouvements circulaires, on utilise souvent le repère de Frenet. C'est un repère local, associé à un point (l'objet en mouvement ou son centre de masse). Pour un schéma voir figure 1.6.

Alors, dans le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$, l'accélération d'un point s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N},$$

où :

- $\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\vec{T}$ est l'accélération tangentielle (en orange, le long de la tangente $\vec{T}$),
- $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ est l'accélération normale (en rouge, dirigée vers le centre de courbure).

Dans le cas d'un mouvement circulaire **uniforme**, la norme de la vitesse est constante :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = \vec{0}.$$

Ainsi, il ne reste que l'accélération normale qui vaut :

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

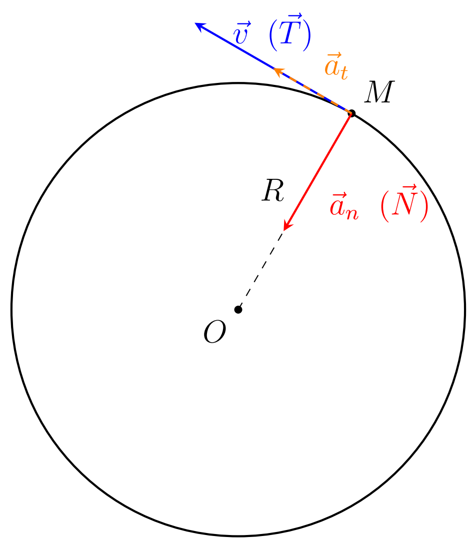


FIGURE 1.6 – Repère de Frenet : vecteurs tangent $\vec{T}$ et normal $\vec{N}$ pour un mouvement circulaire

Expression de l'accélération centripète en fonction de l'accélération angulaire.

On considère un point matériel en mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse linéaire v. Sa vitesse angulaire est ω.

Exprimer l'accélération normale $\vec{a}_n$ en fonction de ω.

Solution :

On sait que l'accélération normale est :

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{N}.$$

Or

$$v = R\omega \quad \Rightarrow \quad v^2 = (R\omega)^2 = R^2\omega^2.$$

Donc :

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{N} = \frac{R^2\omega^2}{R}\,\vec{N} = \omega^2 R\,\vec{N}.$$

Exercice 31. Un point M se déplace sur un cercle de rayon $R = 2$ m avec une vitesse constante $v = 3$ m/s.

a. Déterminer l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et normale $\vec{a}_n$ du point M.
b. Représenter les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ au point M.

Exercice 32. Un point matériel se déplace sur un cercle de rayon $R = 1.5$ m avec une vitesse qui augmente selon $v(t) = 2t$ m/s.

a. Exprimer l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et normale $\vec{a}_n$ en fonction du temps.
b. Calculer $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ à l'instant $t = 2$ s.

Exercice 33. Un lanceur de marteau fait tourner le marteau lancé autour de l'athlète avec un rayon $R = 1.2$ m et une vitesse angulaire $\omega = 5$ rad/s.

a. Calculer l'accélération centripète $\vec{a}_n$ du marteau.
b. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse et le vecteur accélération au point le plus haut du cercle.
c. A quelle vitesse est lancé le marteau ?

1.2.4 Sommation des vitesses linéaires des articulations

La vitesse linéaire de l'extrémité distale est égale à la somme des vitesses linaires des segments proximaux (en amont).
Exemple :

$$\vec{v}_{\text{main}} = \vec{v}_{\text{épaule}} + \vec{v}_{\text{coude}} + \vec{v}_{\text{poignet}}$$

Exercice 34. Un joueur de hand lance la balle avec les caractéristiques suivantes. Déterminer la vitesse linéaire de la balle à la sortie du lancer.

- Longueurs des segments : Bras = 0.23 m, Avant-bras = 0.20 m, Main = 0.18 m
- Vitesses angulaires : $\omega_{\text{bras}} = 10$ rad/s, $\omega_{\text{avant-bras}} = 15$ rad/s, $\omega_{\text{main}} = 20$ rad/s

Exercice 35. Un cycliste effectue un tour de pédalier en 1 s. On notera que la rotation du pédalier transmet sa vitesse à la chaîne, qui la transmet au pignon, puis à la roue.

- Rayon du plateau : $R_{\text{plateau}} = 10.5$ cm
- Rayon du pignon : $R_{\text{pignon}} = 3.5$ cm
- Rayon de la roue : $R_{\text{roue}} = 35$ cm

1.3 Étude de cas

Exercice 36. Lancer de poids L'objectif est de déterminer l'angle optimal de lancer pour maximiser la performance au lancer de poids.

La position du poids lors de l'envol suit les équations horaires de la cinématique :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 \end{cases}$$

où :

- y_0 : hauteur initiale du poids (main du lanceur)
- $v_0 = 14$ m/s : vitesse initiale de lancement
- α : angle d'envol
- $g = 10$ m/s^2 : accélération de la pesanteur

a. Exprimer l'angle d'envol α en fonction des positions (x_i, y_i) des articulations de la main et de l'épaule.

b. On suppose que le poids est lancé à une hauteur initiale $y_0 = 0$. Exprimer la distance parcourue par le poids $x(\alpha)$ en fonction de l'angle d'envol α. Déterminer l'angle α qui maximise la portée.

c. Considérons que le poids est lancé à une hauteur initiale $y_0 = 2$ m. Exprimer la portée $x(\alpha)$ et discuter l'angle d'envol qui maximise la performance. *L'obtention de la valeur exacte de alpha relève d'un bonus.*